TD – Module : Prise en compte de l'aléa

Table des matières

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à clement.rau@iut-tlse3.fr , ou bien à venir me voir au bureau B8.

1 Modélisation par des lois Binomiales

1.1 Modélisation

Pour s'échauffer

Exercice 1. Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de blanches est p. Les tirages se font avec remise ainsi la proportion de boules blanches ne changent jamais.

1. Soit Y la v.a qui vaut 1, si on tire une boule blanche et 0 sinon. Loi de Y ? $\mathbb{E}(Y)$?
2. Soit X la v.a indiquant le nombre de boules noires tirées sur 5 tirages. Quelles sont l'espérance et la variance de cette variable ?

Exercice 2. Un livreur qui se déplace à vélo, rencontre 6 feux sur son trajet. L'état de chaque feu est indépendant des autres et la probabilité qu'un feu soit vert est 2/3. Un feu orange ou rouge, fait perdre 1 minute 30 secondes au livreur. Le premier lieu de dépot est situé à 3km du point de départ du livreur et on estime qu'il roule à 15km/h entre les feux. Soit X le nombre de feux verts rencontrés sur le trajet et T le temps mis par le livreur pour livrer son premier colis.

1. Loi de X ? $\mathbb{E}(X)$?
2. Exprimer T en fonction de X. En déduire $\mathbb{E}(T)$.
3. Le livreur part 17 minutes avant l'heure prévue de livraison du premier colis. Est il raisonnable de penser qu'il arrivera à l'heure ? Quelle est la probabilité pour qu'il arrive en retard ?

Exercice 3. En 2011, un organisme de sondage indique que 65% des entreprises d'un certain département ont dégagé un bénéfice supérieur à 20000 euros. On considè re 300 entreprises de ce département.

1. Quel est l'ordre de grandeur du nombre d'entreprises ayant dégagé un bénéfice supérieur à 20000 euros parmi ces 300 entreprises ?
2. Soit Z la v.a indiquant le nombre d'entreprises (sur les 300 choisies) ayant un bénéfice supérieur à 20000 euros. Donner la valeur littérale de $\mathbb{P}(Z = 195)$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 4. Une fabrication automatique de piè ces donne un pourcentage de rebuts s'élevant à 5%. On considè re un échantillon de 10 piè ces issues de cette fabrication. Calculer la probabilité de trouver dans cet échantillon exactement 2 rebuts ? au plus 2 rebuts ?

Exercice 5. Un avion peut accueillir 20 personnes. Des statistiques montrent que 25% des clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : "nombre de clients qui viennent aprè s réservation parmi les 20".

1. Quelle est la loi de X ? Justifier
2. Quelle est son espérance, son écart-type ?
3. Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Exercice 6. Un tireur vise une cible avec une chance sur deux de la toucher. Combien doit-il tirer de coups afin que la cible soit atteinte avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95 ?

Exercice 7. Un fabricant produit et vend 400 consoles de jeux par mois. Le coût de fabrication est de 160 euros par machine. Le fabricant fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun de ses objets fabriqués. Le test est positif dans 93% des cas et une console de jeux reconnue conforme peut alors être vendue 290 euros. Si le test est en revanche négatif, la console de jeux est bradée au prix de 150 euros.

1. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de consoles de jeux conformes parmi les 400 produites. Calculer l'espérance de X.
2. On note Y la variable aléatoire qui indique le bénéfice mensuel, exprimé en euros. Calculer l'espérance de Y et interpréter le résultat.

Exercice 8. On joue à pile ou face. Si on obtient pile, on gagne 1 euro. Si on obtient face, on perd 1 euro. On considè re une série de 10 lancers.

1. Si la piè ce est non truquée (la probabilité d'avoir pile et la probabilité d'avoir face est la même) :
   (a) Quelle est la probabilité de gagner 10 euros ?
   (b) Quelle est l'espérance de gain ?
2. Si la piè ce est légérement truquée et tombe sur face dans 60% des cas
   (a) Quelle est la probabilité de gagner 10 euros ?
   (b) Quelle est l'espérance de gain ?

Exercice 9. A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié (au sens strict) de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez vous ?
(On discutera en fonction de la valeur de p.)

1.2 Approximation Poissonienne

Exercice 10. On suppose que le pourcentage moyen de gauchers est de 1%. Soit X la variable aléatoire prenant comme valeurs le nombre de gauchers dans un échantillon de 200 personnes choisies au hasard. Montrer que la loi de X est pratiquement une loi de Poisson dont on précisera la moyenne et la variance. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait moins de 4 gauchers dans l'échantillon ?

Exercice 11. Si une personne sur 80 est centenaire, calculer la probabilité qu'il y ait au moins un centenaire dans un groupe de 100 personnes prises au hasard ?

2 Lois Normales

2.1 Manipulations élémentaires

Lecture des tables $\mathcal{N}(0,1)$

Exercice 1. Sachant que X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ calculer à l'aide de la table :

1. $\mathbb{P}(X < 0.82)$; $\mathbb{P}(X < 0.5)$; $\mathbb{P}(X > 1.42)$; $\mathbb{P}(X < -1.32)$; $\mathbb{P}(X > -2.24)$; $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$; $\mathbb{P}(-1.5 < X < 2.35)$
2. Dans chacun des cas, calculer a tel que :
   $\mathbb{P}(X < a) = 0.8238$; $\mathbb{P}(X > a) = 0.0632$; $\mathbb{P}(X < a) = 00.268$

Exercice 2. La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(18, 2.5)$. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X < 17)$; $\mathbb{P}(X > 20)$; $\mathbb{P}(16 < X < 19.5)$.

Exercice 3. X suit une loi $\mathcal{N}(68, 15)$. Déterminer a tel que $\mathbb{P}(X < a) = 0.831$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathcal{N}(3, 2)$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X < 0)$? Pour quelle valeur de λ a t-on $\mathbb{P}(|X - 3| < \lambda) = 0.75$?

Exercice 5. Déterminer les paramè tres (espérance et écart type) d'une loi Normale dont une variable aléatoire X qui suit cette loi, vérifie $\mathbb{P}(X < 12) = 0.977$ et $\mathbb{P}(X < 5) = 0.067$.

Premières mises en situation

Exercice 6. La demande en m^3 sur une période d'un mois d'une station-service suit une $\mathcal{N}(170, 30)$. Quel volume le gérant doit il commander en début de mois pour satisfaire la demande avec une probabilité d'au moins 0.95 ?

Exercice 7. Dans une population masculine, la taille X suit une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(172\,cm, 3\,cm)$. Dans une population féminine comparable, la taille Y suit également un loi normale $\mathcal{N}(166\,cm, 6\,cm)$.

1. Y a t il plus d'hommes ou de femmes qui mesurent plus de 184 cm ?
2. Quelle est la probabilité qu'une femme mesure plus de 184 cm, sachant qu'elle mesure plus de 180 cm ?

Exercice 8. Une usine fabrique des billes de diamè tre théorique $8mm$. Les erreurs d'usinage provoquent une variation du diamè tre qui est une variable aléatoire Normale $\mathcal{N}(0\,mm, 0.015\,mm)$. Lors du contrôle de fabrication on met au rebut les billes qui passent à travers une bague de diamè tre $7,98mm$, ainsi que celles qui ne passent pas à travers une bague de diamè tre $8,02mm$. Quelle est la proportion des billes qui seront rejetées ?

Exercice 9. Un commerçant cherche à établir un budget de trésorerie prévisonnel. Il estime que le montant mensuel des décaissements est distribué suivant une loi Normale de moyenne 3000 €avec un écart-type de 400 €.

1. Quelle est la probabilité que ses décaissements dépassent les 3400 € ?
2. Quel est le montant maximal des décaissements dans 99 % des cas ?
3. Quel est le montant maximal des décaissements dans 90 % des cas ?

Exercice 10. Le délai de livraison d'une marchandise est une v.a. Normale X de moyenne $m = 30$ jours et d'écart-type $\sigma = 5$ jours.

1. Quelle est la probabilité pour que le délai soit compris entre 22 et 38 jours.
2. Trouver le réel x tel que dans 95 % des cas ce délai soit supérieur à x jours

Exercice 11. Sachant que la répartition des quotients intellectuels (QI), rapport entre l'âge mental et l'âge réel, d'une personne est une loi Normale $\mathcal{N}(0.90, 0.40)$.

1. Calculer la probabilité à 0.0001 près, qu'une personne prise au hasard
   (*a*) ait un QI inférieur à 1 ? (*b*) ait un QI inférieur à 0.1 ?
   (*c*) ait un QI supérieur à 1.4 ? (*d*) ait un QI compris entre 0.8 et 1.3 ?
2. En déduire le nombre de personnes dans un village de 1000 habitants
   (*a*) ayant un QI inférieur à 1 ? (*b*) ayant un QI inférieur à 0.1 ?
   (*c*) ayant un QI supérieur à 1.4 ? (*d*) ayant un QI compris entre 0.8 et 1.3 ?

Exercice 12. On estime que le temps nécessaire (en min) à un étudiant pour terminer une épreuve d'examen est une variable $T \sim \mathcal{N}(90, 45)$. 240 candidats se présentent à cet examen

1. Combien d'étudiants termineront l'épreuve en moins de deux heures ?
2. Quelle devrait être la durée de l'épreuve si l'on souhaite que 200 étudiants puissent terminer l'épreuve ?

Exercice 13. L'éclairage d'une commune est assuré par 2000 lampes dont la durée de vie moyenne est 1000 heures. Les tests réalisés pour obtenir cette "espérance de vie" ont montré que la durée de vie des lampes suivait une loi Normale d'écart-type estimé à 200 heures. Les services d'entretien de la commune ont besoin pour leur gestion de connaître

1. Le nombre de lampes hors d'usage au bout de 700 heures.
2. Le nombre de lampes à remplacer entre la 900 ième et la 1300 ième heure.
3. Le nombre d'heures qui se seront écoulées pour que 10 % des lampes soient hors d'usage ?

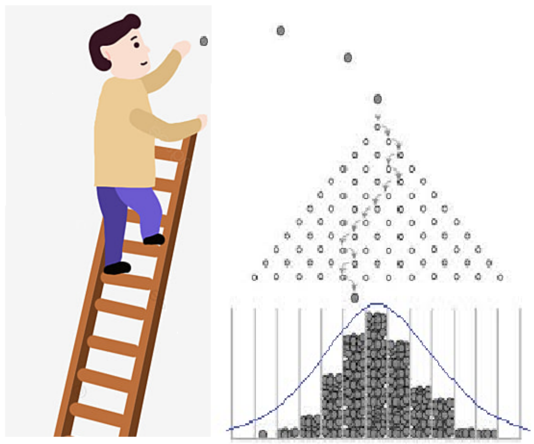
2.2 Approximation par une loi Normale

Exercice 14. On tire 400 fois à pile ou face avec une pièce de monnaie non biaisée. Soit X le nombre de pile.

1. Indiquer la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.
3. On souhaite approximer la loi de X par une loi Normale. Est ce légitime ? Si oui, quels sont les paramètres ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X > 220)$ et $\mathbb{P}(180 < X < 220)$.
5. Déterminer un intervalle $[a; b]$ centrée en $\mathbb{E}(X)$ tel que $\mathbb{P}(a < X < b) = 0.98$. Calculer $\mathbb{P}(X = 220)$ et $\mathbb{P}(X = 190)$

Une répétition de hasards...

Est-ce $\mathcal{N}$ormalement moins hasardeux ?



Exercice 15. Une société de transport souhaite lutter contre la fraude et effectue pour cela des contrôles des titres de transport. Julie utilise ce transport tous les matins. Elle a une probabilité $p = 0,08$ d'être contrôler. Elle effectue 600 voyages par an. On appelle C la v.a égale au nombre de contrôles effectués sur une année.

1. Quelle est la loi de C ?
2. A l'aide d'une approximation de la loi de C, calculer la probabilité que Julie soit contrôlée entre 40 et 50 fois dans l'année.
3. Sachant que le prix d'un ticket est $1,2$ euros et que le prix de l'amende est 20 euros, quelle est la probabilité que Julie soit "perdante" en n'achetant jamais de tickets ?

Exercice 16. (*Gestion de stock*) Un fabricant souhaite lancer une nouvelle console de jeu pour Noël. Les études marketing montrent que parmi les 2000 joueurs de la région, 40% ont déclaré avoir l'intention d'acheter le jeu. On appelle X, la v.a égale au nombre de personnes allant effectivement achetés le jeu.

1. Quelle est la loi de X ?
2. En approximant la loi de X par une loi normale dont on précisera les caractéristiques, déterminer le stock que doit avoir le magasin pour que la probabilité de rupture de stock soit inférieure à $0,1$.

Exercice 17. Chaque jour, dans une certaine ville, 100 personnes ont besoin d'un examen radioscopique. Pour préserver le libre choix, 3 centres d'imagerie sont installés dans cette ville. On admet que les patients choisissent indifféremment l'un ou l'autre centre d'imagerie. Soit N le nombre de clients journaliers dans un certain centre d'imagerie.

1. Quelle est la probabilité qu'un client choisisse ce centre d'imagerie ?
2. Quelle est la loi de N ?
3. Soit c la capacité d'accueil journalière du centre d'imagerie. Traduisez par une inégalité la phrase "le centre d'imagerie est capable de répondre à la demande"
4. A l'aide d'une approximation en loi (*ou du Théorème central limite*), déterminez alors quelle capacité c le centre d'imagerie doit avoir pour être capable de répondre à la demande avec une probabilité de 0,98 ?

Exercice 18. Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux télephone en moyenne 6 minutes par heure. Quel est le nombre (minimal) de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égale à 0,025.

Exercice 19. Un restaurant peut servir 75 repas. La pratique montre que 20% des clients ayant réservé ne viennent pas.

1. Le restaurateur accepte 90 réservations. Quelle est la probabilité qu'il se présente plus de 50 clients ?
2. Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 0,9 de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?

3 Intervalles de confiance

3.1 Première approche des IC

Exercice 1. Soit X la variable aléatoire correspondant au volume d'un flacon de parfum. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(80\ ml, 0.5\ ml)$. Proposer un IC au seuil de confiance 0, 95 puis au seuil de 0, 9.

Exercice 2. Soit Y distribuée suivant une loi Normale. Si on augmente le seuil de confiance, l'amplitude d'un IC (centrée en la moyenne) augmente aussi. Vrai ou Faux ?

Exercice 3. Soit Z une v.a dont la loi est donnée par :

x	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x)$	0.1	0.3	0.4	0.1	0.05	0.05

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. Proposer un IC de votre choix au seuil de confiance 0, 5.
3. Proposer un IC au seuil de confiance 0,7 centré en $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 4. On suppose que le temps de retard T (en min) d'un employé est distribué suivant la loi uniforme discrè te sur $[|0; 20|]$. Proposer un IC centré en $\mathbb{E}(T)$ au seuil de confiance de 0,6.

Exercice 5. On suppose que la demande quotidienne N d'un certain article est distribuée suivant la loi suivante :

Nombre de ventes, k	0	5	10	20	40	50	60
$\mathbb{P}(N = k)$	0.05	0.1	0.2	0.45	0.15	0.03	0.02

Quel doit être le stock minimal S quotidien pour pouvoir satisfaire la demande avec probabilité supérieure ou égale à 0, 95 ?

Exercice 6. (*Inéglalité de Bienaymé-Tchebychev*)

1. Soit Y une v.a positive, montrer que pour tout $t > 0$, on a :
$$\mathbb{P}(Y \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{t}.$$
2. Soit X une v.a, déduire de la question précédente que pour tout $s \neq 0$,
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq s) \leq \frac{var(X)}{s^2}.$$
3. A l'aide d'une valeur de t bien choisie, déduire que si X est une v.a (non constante),
$$\mathbb{P}[\mathbb{E}(X) - 2\sigma(X) < X < \mathbb{E}(X) + 2\sigma(X)] > \frac{3}{4}.$$

Vous venez de trouver un IC au niveau de confiance 75%.

3.2 Estimation de moyenne (espérance) par intervalle de confiance (asymptotique)

Exercice 7. Avant le second tour d'une élection, opposant les candidats D et G, un institut de sondage interroge au hasard 1000 personnes dans la rue. On note p la proportion d'électeurs décidés à voter pour G dans la population totale et on suppose l'échantillon de personnes intérrogées représentatif. Dans l'échantillon sondé, cette proportion est égale à 0, 54.

1. Proposer un intervalle de confiance pour p avec un risque d'erreur de 5%.
2. Combien de personnes faut-il interroger pour donner une fourchette à 1% avec un seuil de 95% ?

Exercice 8. Un constructeur automobile fait appel à un institut de sondage afin de mesurer le degré de satisfaction du service après-vente. L'institut souhaite estimer la proportion de clients satisfaits au niveau de confiance 0,95 avec une amplitude d'au plus 5 centièmes. Combien de personnes au minimum faut-il interroger ?

Exercice 9. Dans une banque, une étude a montré que la durée (en min) d'un rdv peut être considéré comme la réalisation d'une variable aléatoire Normale X, de moyenne m et de variance σ^2. On admet que les rdv sont indépendants les uns des autres. La durée de $n = 30$ rdv a été noté dans le dans le tableau suivant :

50,34	52,62	53,79	54,99	55,82	57,67
51,41	53,13	53,89	55,04	55,91	57,99
51,51	53,28	54,63	55,12	55,95	58,10
52,07	53,30	54,76	55,24	57,05	59,30
52,22	53,32	54,78	55,28	57,18	60,58

1. Calculer la moyenne empirique et l'écart-type empirique de cette série statistique.
2. Donner une estimation (sans biais) des paramètres m et σ.
3. Donner un intervalle de confiance au niveau 95%, puis 98%, de la durée moyenne d'un rdv.
4. Tester si la moyenne de cette variable est égale à 55.

Exercice 10. (*Prof fainéant ou matheux ?*) Voulant évaluer rapidement les résultats obtenus par ses 200 étudiants lors d'un partiel, un professeur décide de corriger quelques copies tirées au hasard. Il admet par ailleurs que les notes de ses élèves suivent une loi Normale de variance 4. Le professeur corrige un échantillon de 7 copies et trouve une moyenne de 11.

1. Donner un intervalle de confiance à 95% de la moyenne des 200 copies ?
2. Combien de copies le professeur doit-il corriger s'il veut situer la moyenne générale de ses élèves dans un intervalle de confiance d'amplitude 2, avec un risque de 5% ?
3. En trouvant une moyenne égale à 11, combien de copies le professeur devrait-il corriger pour pouvoir dire, avec un risque de 1%, que la moyenne de tous les élèves est supérieure à 10 ?

Exercice 11. (*IC pour la durée de vie d'un composant*) Une entreprise fabrique un certain type de composants électroniques dont la durée de vie X, exprimée en heures, est une variable aléatoire qui suit une loi Normale. Des mesures effectuées sur un échantillon aléatoire de taille $n = 50$ ont donné les résultats suivants :

$$\sum_{i=1..50} x_i = 60000 \ \ et \ \ \sum_{i=1..50} x_i^2 = 74 \times 10^6.$$

1. Donner une estimation ponctuelle de la durée de vie moyenne des composants.
2. Donner une estimation ponctuelle (non biaisée) de l'écart-type de cette durée de vie.
3. Donner un intervalle de confiance à 95% de cette durée de vie moyenne.
4. Quelle aurait du être la taille de l'échantillon pour que l'intervalle de confiance à 95% de la durée de vie moyenne des composants ait une amplitude de 60 heures ?

Exercice 12. (*Charte qualité d'une saisie informatique*) Une société s'occupe de la saisie informatique de documents. Pour chaque document, une première saisie est retournée pour vérification au client correspondant. Pour chaque document, le délai de retour de la première saisie vers le client est fixé à deux semaines. On appelle p la probabilité qu'une saisie choisie au hasard soit effectivement retournée au client dans le délai fixé. On note X_n, la v.a qui a tout échantillon de n saisies choisies au hasard, associe le nombre de saisies pour lesquelles le délai n'est pas respecté.

1. Pour estimer p, on effectue une étude statistique. Sur 1250 saisies, 1122 ont été réalisées dans le délai imparti. Proposez une estimation de p à l'aide d'un intervalle de confiance au niveau 95%. **On suppose dans la suite de l'exercie que** $p = 0,9$
2. Quelle est la loi de X_n ?
3. Quel est le nombre moyen de saisies pour lesquelles le délai n'est pas respecté ?
4. Dans cette question uniquement $n = 20$, calculer $\mathbb{P}(X_{20} = 2)$.
5. Soit Y la v.a qui, à une saisie choisie au hasard, associe le nombre d'erreurs détectées dans cette saisie. On admet que $Y \sim \mathcal{N}(30, 8)$. L'entreprise veut signer une charte qualité qui stipule qu'elle garantie au client qu'au moins 99% des saisies comporte moins de m fautes. Déterminer le plus petit entier m qui rende l'engagement de l'entreprise réaliste.

Exercice 13. (*Durée de traitement des dossiers d'une agence bancaire*) Afin de mieux gérer les demandes de crédits de clients, un directeur d'agence bancaire réalise une étude relative à la durée de traitement des dossiers, supposée suivre une loi normale. Les données sont résumées ci-dessous :

Durée de traitement (min)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
Effectif	3	6	10	7	3	1

1. Calculer la moyenne et l'écart-type des durées de traitement des dossiers de cet échantillon.
2. Construire une estimation par intervalle de confiances de la moyenne m des durées de traitement des dossiers, au seuil de confiance 90%.

3.3 Echantillonage de moyenne empirique (intervalle de fluctuation)

Exercice 14. Une machine produit 6.5% d'outils défectueux. On préléve 85 outils. Donner un intervalle dans lequel avec proba 0.95 le nombre d'outils défectueux doit se trouver.

Exercice 15. L'entreprise M.E.C emploie 1350 salariés, dont 560 sont des femmes. Dans une entreprise de 1350 salariés ne faisant pas de discrimination au sexe à l'embauche, donner un intervalle de la proportion de femmes au seuil de 95%. Peut-on raisonnablement dire que l'entreprise M.E.C respecte la parité ?

Exercice 16. Un fabricant d'alarme commande auprè s de son fournisseur deux types de composants électroniques : A et B . Il demande 900 composants de chaque sorte. Au moment de la livraison, le service de contrôle pioche un échantillon de 50 composants, et constate que seulement 19 sont des A. Peut-on affirmer que la commande est respectée par le fournisseur (au niveau 0,95) ? On supposera que la commande est respectée et on donnera par exemple, un intervalle de fluctuation de la proportion empirique de composants A.

Exercice 17. Dans une banque, une étude a montré que la durée (en min) d'un rendez-vous peut être considéré comme la réalisation d'une variable aléatoire de moyenne $m = 35\ min$ et d'écart-type $\sigma = 10\ min$. On admet que les rdv sont indépendants les uns des autres. L'ensemble des 3 employés de la banque honore en moyenne 36 rendez-vous quotidien.

1. Soit D la v.a correspondant à la durée totale quotidienne des rendez-vous. Proposez un intervalle de fluctuation (au niveau $0,95$) pour D un certain jour.
2. On suppose que les 3 employés se répartissent uniformément les clients et que leur temps de travail quotidien est de 8h. Est ce que la masse salariale des conseillers est suffisante pour répondre à la demande ?

Exercice 18. (*Exemple d'intervalle unilatéral*) On suppose que le nombre de baguettes achetées X par client, est distribuée suivant la loi suivante :

k	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	0,25	0,4	0,2	0,1	0,05

Combien de baguettes le boulanger doit il produire (au minimum) pour satisfaire la demande de 150 clients sur une journée avec proba 0.95 ?

Exercice 19. (*Autre exemple d'intervalle unilatéral*) Dans un supermarché, on suppose que le nombre de bouteilles d'eau achetées par client, suit une loi $\mathcal{N}(10, 2)$. Cette enseigne reçoit quotidiennement 100 clients . Quel doit être le stock minimal S sur une journée pour éviter la rupture avec probabilité $0,9$? Même question, si l'on veut éviter la rupture avec probabilité 0.95 ?

Exercice 20. La somme retirée au guichet d'une banque par chaque client est en moyenne 45,6 euros avec un écart type de 19,2 euros. 120 personnes se présentent ce jour au guichet. Le but de l'exercice est d'estimer (dans un cas simplifié) la quantité de "liquide" dont le guichet doit disposer pour pouvoir faire face à la demande avec une probabilité au moins égale à 0,95. Pour cela, on suppose que chaque client qui se présente au guichet, peut : soit retirer 20 euros avec probabilité 0,36 ou bien retirer 60 euros. Pour un client i, on note X_i la somme retirée.

1. Donner la loi de X_i sous forme d'un tableau.
2. Préciser l'esperance et l'écart-type de X_i. Vérifier vos valeurs avec les valeurs annoncées dans l'enoncé.
3. Soit S la variable aléatoire indiquant la somme totale retirée ce jour par les 120 clients. Exprimer S à l'aide des X_i.
4. En appliquant le TCL, aux X_i, déduire un intervalle $[\alpha; \beta]$ dans lequel la somme retirée doit se trouver avec probabilité 0,95.
5. La banque dispose de 5030 euros en espéce, qu'en pensez vous ?

Exercice 21. (*Intervalle de confiance à l'aide d'une approximation Poissonnienne VS TCL*) Afin de mieux satisfaire leurs clients, une grande société fournisseur d'accè s internet fait des statistiques sur le nombre d'appels reçus en hotline, elle pourra ainsi évaluer le temps d'attente pour le client et le nombre d'employés à mettre au standard. Les résultats de l'enquête portent sur 200 séquences consécutives de une minute, durant lesquelles le nombre d'appels moyen a été de 3 appels par minute. Pour simplifier, on supposera qu'il y a au plus un appel par unité de temps qui est la seconde.

1. Quelle est la loi de probabilité du nombre d'appels reçus en 4 minutes ?
2. Montrer que l'on peut approcher cette loi par une loi de Poisson.
3. En déduire "directement" un intervalle de fluctuation (centré en la moyenne de la loi précédente) pour une réalisation de la v.a nombre d'appels en 4 minutes (au seuil 5%).
4. Donner un intervalle de fluctuation à l'aide du Théorème central limite. Comparer.

Et si finalement, tout cela était à peu prés $\mathcal{N}$ormal ?

Fin

4 Annexe

4.1 Tables Loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$

Fonction de répartition $\mathbb{P}(X \leq t)$.

t	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Fonction inverse de la répartition de la Normale centrée réduite.

P	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.01	+
0	∞	3.09	2.878	2.748	2.652	2.576	2.512	2.457	2.409	2.366	2.326	0.99
0.01	2.326	2.29	2.257	2.226	2.197	2.17	2.144	2.12	2.097	2.075	2.054	0.98
0.02	2.054	2.034	2.014	1.995	1.977	1.96	1.943	1.927	1.911	1.896	1.881	0.97
0.03	1.881	1.866	1.852	1.838	1.825	1.812	1.799	1.787	1.774	1.762	1.751	0.96
0.04	1.751	1.739	1.728	1.717	1.706	1.695	1.685	1.675	1.665	1.655	1.645	0.95
0.05	1.645	1.635	1.626	1.616	1.607	1.598	1.589	1.58	1.572	1.563	1.555	0.94
0.06	1.555	1.546	1.538	1.53	1.522	1.514	1.506	1.499	1.491	1.483	1.476	0.93
0.07	1.476	1.468	1.461	1.454	1.447	1.44	1.433	1.426	1.419	1.412	1.405	0.92
0.08	1.405	1.398	1.392	1.385	1.379	1.372	1.366	1.359	1.353	1.347	1.341	0.91
0.09	1.341	1.335	1.329	1.323	1.317	1.311	1.305	1.299	1.293	1.287	1.282	0.9
0.1	1.282	1.276	1.27	1.265	1.259	1.254	1.248	1.243	1.237	1.232	1.227	0.89
0.11	1.227	1.221	1.216	1.211	1.206	1.2	1.195	1.19	1.185	1.18	1.175	0.88
0.12	1.175	1.17	1.165	1.16	1.155	1.15	1.146	1.141	1.136	1.131	1.126	0.87
0.13	1.126	1.122	1.117	1.112	1.108	1.103	1.098	1.094	1.089	1.085	1.08	0.86
0.14	1.08	1.076	1.071	1.067	1.063	1.058	1.054	1.049	1.045	1.041	1.036	0.85
0.15	1.036	1.032	1.028	1.024	1.019	1.015	1.011	1.007	1.003	0.999	0.994	0.84
0.16	0.994	0.99	0.986	0.982	0.978	0.974	0.97	0.966	0.962	0.958	0.954	0.83
0.17	0.954	0.95	0.946	0.942	0.938	0.935	0.931	0.927	0.923	0.919	0.915	0.82
0.18	0.915	0.912	0.908	0.904	0.9	0.896	0.893	0.889	0.885	0.882	0.878	0.81
0.19	0.878	0.874	0.871	0.867	0.863	0.86	0.856	0.852	0.849	0.845	0.842	0.8
0.2	0.842	0.838	0.834	0.831	0.827	0.824	0.82	0.817	0.813	0.81	0.806	0.79
0.21	0.806	0.803	0.8	0.796	0.793	0.789	0.786	0.782	0.779	0.776	0.772	0.78
0.22	0.772	0.769	0.765	0.762	0.759	0.755	0.752	0.749	0.745	0.742	0.739	0.77
0.23	0.739	0.736	0.732	0.729	0.726	0.722	0.719	0.716	0.713	0.71	0.706	0.76
0.24	0.706	0.703	0.7	0.697	0.693	0.69	0.687	0.684	0.681	0.678	0.674	0.75
0.25	0.674	0.671	0.668	0.665	0.662	0.659	0.656	0.653	0.65	0.646	0.643	0.74
0.26	0.643	0.64	0.637	0.634	0.631	0.628	0.625	0.622	0.619	0.616	0.613	0.73
0.27	0.613	0.61	0.607	0.604	0.601	0.598	0.595	0.592	0.589	0.586	0.583	0.72
0.28	0.583	0.58	0.577	0.574	0.571	0.568	0.565	0.562	0.559	0.556	0.553	0.71
0.29	0.553	0.55	0.548	0.545	0.542	0.539	0.536	0.533	0.53	0.527	0.524	0.7
0.3	0.524	0.522	0.519	0.516	0.513	0.51	0.507	0.504	0.502	0.499	0.496	0.69
0.31	0.496	0.493	0.49	0.487	0.485	0.482	0.479	0.476	0.473	0.47	0.468	0.68
0.32	0.468	0.465	0.462	0.459	0.457	0.454	0.451	0.448	0.445	0.443	0.44	0.67
0.33	0.44	0.437	0.434	0.432	0.429	0.426	0.423	0.421	0.418	0.415	0.412	0.66
0.34	0.412	0.41	0.407	0.404	0.402	0.399	0.396	0.393	0.391	0.388	0.385	0.65
0.35	0.385	0.383	0.38	0.377	0.375	0.372	0.369	0.366	0.364	0.361	0.358	0.64
0.36	0.358	0.356	0.353	0.35	0.348	0.345	0.342	0.34	0.337	0.335	0.332	0.63
0.37	0.332	0.329	0.327	0.324	0.321	0.319	0.316	0.313	0.311	0.308	0.305	0.62
0.38	0.305	0.303	0.3	0.298	0.295	0.292	0.29	0.287	0.285	0.282	0.279	0.61
0.39	0.279	0.277	0.274	0.272	0.269	0.266	0.264	0.261	0.259	0.256	0.253	0.6
0.4	0.253	0.251	0.248	0.246	0.243	0.24	0.238	0.235	0.233	0.23	0.228	0.59
0.41	0.228	0.225	0.222	0.22	0.217	0.215	0.212	0.21	0.207	0.204	0.202	0.58
0.42	0.202	0.199	0.197	0.194	0.192	0.189	0.187	0.184	0.181	0.179	0.176	0.57
0.43	0.176	0.174	0.171	0.169	0.166	0.164	0.161	0.159	0.156	0.154	0.151	0.56
0.44	0.151	0.148	0.146	0.143	0.141	0.138	0.136	0.133	0.131	0.128	0.126	0.55
0.45	0.126	0.123	0.121	0.118	0.116	0.113	0.111	0.108	0.105	0.103	0.1	0.54
0.46	0.1	0.098	0.095	0.093	0.09	0.088	0.085	0.083	0.08	0.078	0.075	0.53
0.47	0.075	0.073	0.07	0.068	0.065	0.063	0.06	0.058	0.055	0.053	0.05	0.52
0.48	0.05	0.048	0.045	0.043	0.04	0.038	0.035	0.033	0.03	0.028	0.025	0.51
0.49	0.025	0.023	0.02	0.018	0.015	0.013	0.01	0.008	0.005	0.003	0	0.5
-	0.01	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0	P

Pour un $P \in [0;1]$, la table renvoie le t tel que $\mathbb{P}(X \leq t) = P$.

- Lorsque $P \leq 0.5$, il faut utiliser la colonne de gauche et la ligne supérieure. (Les fractiles sont négatifs).
- Lorsque $P \geq 0.5$, il faut utiliser la colonne de droite et la ligne inférieure. (Les fractiles sont positifs.)

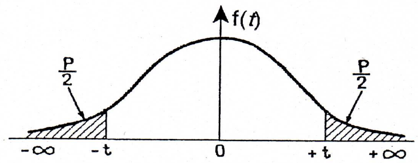
4.2 Tables Loi de Student

Etant donné P, la table renvoit le t tel que $P(X<t) = P$, où $X \sim \text{Student}(k)$

k \ P	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999
1.	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.313
2.	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3.	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4.	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5.	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6.	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7.	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.782
8.	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.499
9.	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.296
10.	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.143
11.	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.024
12.	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.929
13.	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14.	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15.	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16.	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17.	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18.	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19.	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20.	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21.	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22.	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23.	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24.	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25.	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26.	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27.	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28.	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29.	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30.	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
31.	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375
32.	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365
33.	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356
34.	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348
35.	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
36.	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333
37.	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326
38.	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319
39.	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313
40.	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
41.	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301
42.	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296
43.	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291
44.	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286
45.	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
46.	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277
47.	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273
48.	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269
49.	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265
50.	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
51.	1.298	1.675	2.008	2.402	2.676	3.258
52.	1.298	1.675	2.007	2.400	2.674	3.255
53.	1.298	1.674	2.006	2.399	2.672	3.251
54.	1.297	1.674	2.005	2.397	2.670	3.248
55.	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245

Table de la loi de Student

Etant donné une valeur P, la table renvoit le nombre t, tel que $\boldsymbol{P}(\ |X|>t)=P$, où X suit une student(ν).



ν	$P = 0{,}90$	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,12566	0,25335	0,38532	0,52440	0,67449	0,84162	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	

ν est le nombre de degrés de liberté.

FIGURE 1 – Table de loi de Student.

Fin